

MATEMATICA ATTUARIALE

Assicurazioni

Riserva Matematica

MATEMATICA ATTUARIALE

Studio combinato di eventi certi (operazioni finanziarie) ed eventi aleatori (vita o morte di un individuo).

La matematica attuariale è strettamente legata al calcolo delle probabilità (con più precisione al calcolo della frequenza).

Il calcolo della probabilità di vita o di morte è effettuabile tramite le:

TAVOLE DI SOPRAVVIVENZA E TAVOLE DI MORTALITÀ ≡ TAVOLE DEMOGRAFICHE

Le tavole demografiche sono compilate in base alle:

Funzioni Biometriche: (riguardano la misura della vita umana) funzioni dell'età; tengono conto della probabilità di esistenza in vita dopo x anni o della probabilità di morte entro x anni di un gruppo omogeneo di individui.

Le funzioni biometriche tengono conto della vita di un individuo, preso da un gruppo omogeneo di 100.000, compresa tra 0 e 106 anni:

$$0 \leq x \leq 106$$

Età Estrema: $\omega = 107$ anni; età alla quale non è più vivente alcun individuo del gruppo omogeneo considerato.

SIMBOLISMO

l_x = numero di viventi all'età x (diminuisce all'aumentare di x);

d_x = numero dei morti tra l'età x e l'età $x + 1$ (aumenta all'aumentare di x): $d_x = l_x - l_{x+1}$

q_x = Tasso annuo di mortalità

probabilità di un individuo di età x di morire entro 1 anno:

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+1}}{l_x} = 1 - \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

p_x = Tasso annuo di sopravvivenza: probabilità di un individuo di età x di vivere ancora 1 anno:

Vita e Morte = eventi incompatibili \Rightarrow soggetti al teorema della probabilità totale: $p_x + q_x = 1$

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

n. b. i valori di l_x e d_x sono ricavabili dalle tavole demografiche.

PROBABILITÀ DI VITA E DI MORTE

Probabilità di vita dopo n anni: ${}_n/p_x = p$ con x differito n; Calcolo di eventi compatibili \equiv Probabilità composta:

$${}_n/p_x = \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} \quad ; \quad p_{x+i} = \frac{l_{x+1+i}}{l_x}$$

Probabilità di morte entro n anni: ${}_n/q_x = q$ con x temporaneo n; Calcolo di eventi incompatibili (probabilità di vita o di morte entro gli anni da x a n) \equiv Probabilità totale:

$$\begin{aligned} {}_n/p_x + {}_n/q_x &= 1 \Rightarrow \\ {}_n/q_x &= 1 - {}_n/p_x = 1 - \frac{l_{x+n}}{l_x} \Rightarrow \quad {}_n/q_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x} \end{aligned}$$

Probabilità di morte differita: ${}_r/q_x = q$ con x differito r; Probabilità per x di morire dopo r anni ed entro l'anno $x+r+1$ (ciò significa supporre che x sia in vita dopo r anni e che possa morire entro l'anno $x+r+1$). Calcolo di eventi compatibili \equiv Probabilità composta:

$${}_r/q_x = {}_r/p_x \cdot q_{x+r} = \frac{l_{x+r}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+r} - l_{x+r+1}}{l_{x+r}} = \frac{l_{x+r} - l_{x+r+1}}{l_x}$$

Probabilità di morte differita r anni e temporanea n anni: ${}_r/n/q_x = q$ con x differito r e temporaneo n; Probabilità di morire tra l'età $x+r$ e l'età $x+r+n$ (ciò significa supporre che x sia in vita fino all'età r e che possa morire negli anni da r ad n). Calcolo di eventi compatibili \equiv Probabilità composta:

$${}_r/n/q_x = {}_r/p_x \cdot {}_n/q_{x+r} = \frac{l_{x+r}}{l_x} \cdot \frac{l_{x+r} - l_{x+r+n}}{l_{x+r}} = \frac{l_{x+r} - l_{x+r+n}}{l_x}$$

VITA MEDIA

Vita media incompleta: e_x (non tiene conto delle frazioni di anno) anni che restano da vivere ad un individuo di età x . Variabile casuale che può assumere tutti i valori compresi tra 0 e $\omega-x-1$, ognuno con probabilità i/q_x :

$$\mathbf{V} \begin{cases} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & \omega-x-1 \\ q_x & 1/q_x & 2/q_x & 3/q_x & \dots & (\omega-x-1)/q_x \end{cases}$$

la cui media è:

$$e_x = \sum_{i=0}^{\omega-x-1} v_i \cdot p_i = \sum_{i=0}^{\omega-x-1} v_i \cdot i / q_x = 0 \cdot q_x + 1 \cdot 1 / q_x + 2 \cdot 2 / q_x + \dots + (\omega-x-1) / q_x \Rightarrow$$

$$e_x = \frac{1_{x+1} + 1_{x+2} + 1_{x+3} + \dots + 1_{\omega-1}}{1_x}$$

Vita media completa: e_x° (tiene conto delle frazioni di anno) si suppone che x possa vivere mediamente 0,5 anni in più per ogni anno calcolato precedentemente. La variabile casuale assume, pertanto, i valori:

$$v_i = i + 0,5$$

Con calcoli analoghi al caso precedente si ottiene:

$$e_x^\circ = e_x + 0,5$$

VITA PROBABILE

Numero di anni che un individuo di età x può ancora vivere con incertezza e con probabilità pari ad $\frac{1}{2}$ (tale valore si ricerca sulle tavole demografiche). È possibile effettuare il calcolo analitico ricorrendo all'interpolazione.

Esempio: calcolare la vita probabile di un 40-ne:

$${}_n P_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{l_{40+n}}{l_{40}} = \frac{1}{2} \Rightarrow l_{40+n} = l_{40} \cdot \frac{1}{2}$$

$$l_{40} + \pi_x = \frac{l_{40}}{2} = \frac{92,870}{2} = 46,435$$

Si ricerca sulle tavole l'età (il valore di x) a cui corrisponde tale valore:

$$(75 - 74) : (74+x - 74) = (48,218 - 45,050) : (48,218 - 46,435)$$

$$1 : x = 3,168 : 1,783 \Rightarrow x = 0,56$$

$$\pi_x = 74 + x - 40 = 34,56 =$$

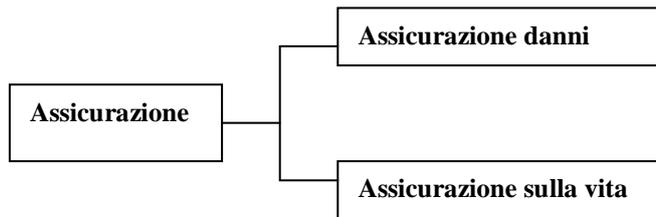
$$= 34 \text{ anni, } 6 \text{ mesi, } 23 \text{ giorni}$$

x	l_x
74	48,218
74 + x	46,435
75	45,050

ASSICURAZIONI

Art. 1882 c. c. :

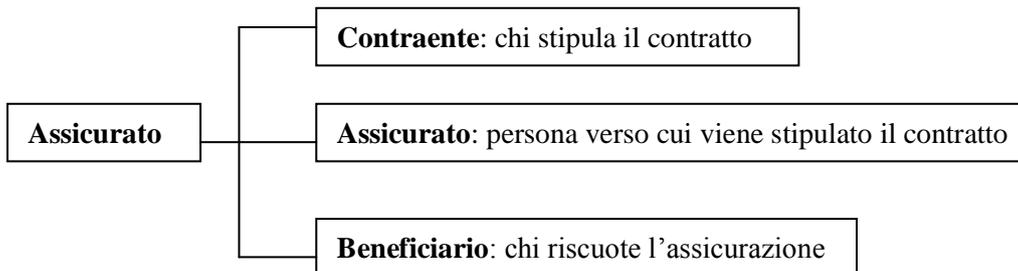
L'assicurazione è il contratto con il quale l'assicuratore, verso pagamento di un premio, si obbliga a rivalere l'assicurato, entro i limiti convenuti, del danno ad esso prodotto da un sinistro, ovvero a pagare un capitale o una rendita al verificarsi di un evento attinente alla vita umana.



Partecipanti al contratto di assicurazione secondo il c. c. :

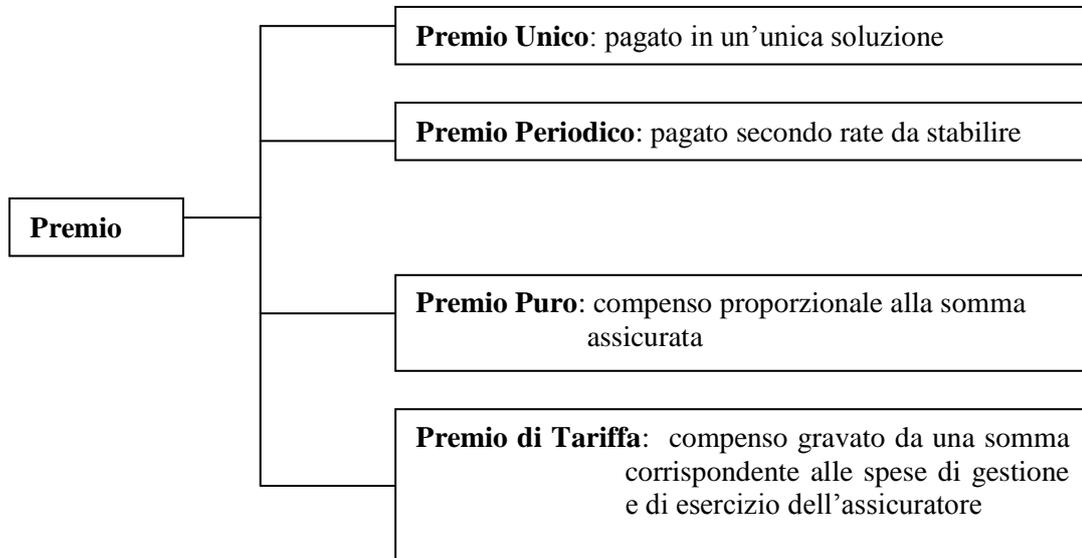
Assicuratore: ente o impresa che gestisce l'assicurazione;

Assicurato: persona fisica o giuridica cui è legato l'evento al quale si riferisce l'assicurazione.



n. b. le voci relative all'assicurato possono riferirsi ad una stessa persona o a persone diverse.

I compensi pagati all'assicuratore sono detti **premi**



I termini del contratto, la scadenza, l'ammontare dei premi e dei capitali sono riportati sulla polizza di assicurazione.

ASSICURAZIONE SULLA VITA

Assicurazione caso Vita: pagamento subordinato all'esistenza in vita dell'assicurato (assicurazione di capitale differito; assicurazione di rendita vitalizia).

Assicurazione caso Morte: pagamento subordinato alla morte dell'assicurato (beneficiario \equiv eredi).

Assicurazione Mista: combinazione di assicurazione caso vita e caso morte.

CALCOLO DELL' ASSICURAZIONE

Valore attuariale: valore equivalente ad un capitale futuro o ad una serie di rate da riscuotere.

Premio unico puro che l'assicurato deve versare alla compagnia d'assicurazione

Valore attuariale \equiv Premio unico puro \equiv

Speranza matematica della somma totale che l'assicuratore dovrà pagare se si verificano gli eventi per i quali è stato stipulato il contratto.

Calcolo premio unico puro: utilizzo del concetto di speranza matematica \equiv prodotto del valore attuale certo $[v^t = (1+i)^{-t}]$ per la probabilità di riscossione di tale capitale.

Per il calcolo del premio unico puro bisogna far uso dei simboli di commutazione, prodotto di fattori demografici e di fattori finanziari i cui risultati, tabulati, costituiscono le Tavole Demografico – Finanziarie.

n. b. *le tavole demografico – finanziarie si basano sulle tabelle di sopravvivenza e sulla scelta di un tasso d'interesse pari, in genere, al 4%.*

SIMBOLI DI COMMUTAZIONE

Caso Vita:

$V = (1+i)^{-1}$: valore attuale di una lira
 l_x : numero di persone viventi all'età x

$$D_x = l_x \cdot v^x = l_x \cdot (1+i)^{-x}$$

D_x : (diminuisce al crescere di x) somma di lire versate, 1 lira per ogni persona vivente all'età x , calcolata al momento della loro nascita, cioè scontata di x anni.

n. b. $i = 4\% \Rightarrow (1+i)^{-1} = 1,04^{-1} \approx 0,96154 = v$

Somma intera dei D_x :

$$\sum_{i=0}^{106-x} D_{x+i} = N_x$$

N_x : (diminuisce al crescere di x) somma di tutti i D_x dall'età x fino all'età estrema.

Somma intera degli N_x :

$$\sum_{i=0}^{106-x} N_{x+i} = S_x$$

S_x : (diminuisce al crescere di x) somma di tutti gli N_x dall'età x fino all'età estrema.

Relazioni tra i simboli caso vita:

$$N_x = D_x + N_{x+1} \Rightarrow \begin{cases} N_{x+1} = N_x - D_x \\ D_x = N_x - N_{x+1} \end{cases} \quad S_x = N_x + S_{x+1} \Rightarrow \begin{cases} S_{x+1} = S_x - N_x \\ N_x = S_x - S_{x+1} \end{cases}$$

Caso Morte:

$V = (1+i)^{-1}$: valore attuale di una lira
 d_x : numero di persone non viventi all'età x

$$C_x = d_x \cdot v^{x+1} = d_x \cdot (1+i)^{-(x+1)}$$

n. b. *l'esponente $(x+1)$ è dovuto al fatto che il premio è pagato alla fine dell'anno se la morte avviene tra l'anno x e l'anno $x+1$ dalla stipulazione del contratto.*

d_x : funzione variabile; v^{x+1} = funzione decrescente.

C_x : funzione a valori positivi a volte crescenti a volte decrescenti; rappresenta una somma di lire versate, 1 lira per ogni persona morta tra l'età x e l'età $x+1$, calcolata al momento della loro nascita, cioè scontata di $x+1$ anni.

Somma intera dei C_x :

$$\sum_{i=0}^{106-x} C_{x+i} = M_x$$

M_x : (diminuisce al all'aumentare di x) somma di tutti i C_x dall'età x fino all'età estrema.

Somma intera degli M_x :

$$\sum_{i=0}^{106-x} M_{x+i} = R_x$$

R_x : (diminuisce al all'aumentare di x) somma di tutti gli M_x dall'età x fino all'età estrema.

Relazione tra i simboli caso morte:

$$M_x = C_x + M_{x+1} \Rightarrow \begin{cases} M_{x+1} = M_x - C_x \\ C_x = M_x - M_{x+1} \end{cases} \quad R_x = M_x + R_{x+1} \Rightarrow \begin{cases} R_{x+1} = R_x - M_x \\ M_x = R_x - R_{x+1} \end{cases}$$

SOMME TRONCHE

Somme limitate di valori relativi ai simboli di commutazione:

$$D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n} = N_x - N_{x+n+1} \Rightarrow \begin{cases} D_{30} + D_{31} + \dots + D_{50} = N_{30} - N_{51} \\ N_{20} - N_{40} = D_{20} + \dots + D_{39} \end{cases}$$

$$C_x + C_{x+1} + \dots + C_{x+n} = M_x - M_{x+n+1} \Rightarrow \begin{cases} C_{30} + C_{31} + \dots + C_{50} = M_{30} - M_{51} \\ M_{20} - M_{40} = C_{20} + \dots + C_{39} \end{cases}$$

$$M_x + M_{x+1} + \dots + M_{x+n} = R_x - R_{x+n+1} \Rightarrow \begin{cases} M_{30} + M_{31} + \dots + M_{50} = R_{30} - R_{51} \\ R_{20} - R_{40} = M_{20} + \dots + M_{39} \end{cases}$$

n. b. *le somme tronche hanno lo scopo di determinare il valore attuariale tra l'epoca in cui avviene la stipulazione dell'assicurazione e l'epoca in cui essa ha termine.*

ASSICURAZIONI CASO VITA

Assicurazione a Capitale Differito:

Con tale assicurazione un individuo di età x si garantisce, mediante pagamento di un premio, una somma di denaro da riscuotere all'età $x+n$ se ancora in vita.

Determinazione del Premio Unico Puro ($= {}_n/E_x$)

Metodo della Speranza Matematica
Metodo delle Mutue Società

${}_n/E_x$: (E con x differito n) premio unico puro che deve pagare un individuo di età x per stipulare un'assicurazione di capitale differito di 1 lira scadente all'età $n \equiv$ premio unico puro per assicurarsi 1 lira tra n anni se in vita.

${}_n/E_x$ = fattore di sconto demografico – finanziario = valore attuariale di un capitale differito di 1 lira.

Metodo della Speranza Matematica:

Si considera l'assicurazione come un gioco equo, per cui il premio pagato dall'assicurato deve essere uguale al valore attuale di 1 lira, esigibile con certezza tra n anni (v^n), moltiplicata per la sua probabilità di riscossione, pari alla probabilità che ha x di vivere ancora n anni (${}_n/p_x$):

$${}_n/E_x = v^n \cdot {}_n/p_x$$

$${}_n/E_x = \frac{v^n \cdot I_{x+n}}{I_x} = \frac{v_x^n \cdot I_{x+n}}{v_x \cdot I_x} = \frac{v^{(x+n)} \cdot I_{x+n}}{v^x \cdot I_x} \Rightarrow {}_n/E_x = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$$v^x \cdot I_x = D_x \quad ; \quad v^{(x+n)} \cdot I_{x+n} = D_{x+n}$$

Metodo delle Mutue Società

Forma di assicurazione stipulata da un gruppo di individui di età x (I_x) a favore di quelli che saranno in vita dopo n anni (I_{x+n}), versando ognuno una somma ${}_n/E_x$ in modo che, impiegata per n anni al tasso i , la somma complessiva dia un montante che garantisca 1 lira a ciascuno degli I_{x+n} individui ancora in vita:

$${}_n/E_x \cdot I_x \cdot (1+i)^n = 1 \cdot I_{x+n}$$

$${}_n/E_x = \frac{1}{(1+i)^n} \cdot \frac{I_{x+n}}{I_x} = \frac{v^n \cdot I_{x+n}}{I_x} = \frac{v^x}{v^x} \cdot \frac{v^n \cdot I_{x+n}}{I_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Calcolo del Premio Unico Puro

U = premio unico puro

C = capitale assicurato

$$U = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x} / E_x = C \cdot \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

Formule inverse:

$$C = U \cdot \frac{D_x}{D_{x+n}} \quad ; \quad D_{x+n} = D_x \cdot \frac{U}{C} \quad (*)$$

(*) formula per ottenere la scadenza (n) del contratto tramite interpolazione.

ASSICURAZIONE DI RENDITA VITALIZIA A RATE ANNUE COSTANTI

Forma di assicurazione mediante la quale l'assicurato si garantisce una successione di somme (rate) esigibili periodicamente se alle varie scadenze è ancora in vita.

Classificazione delle Rendite:

Relativamente all'assicurato	rispetto alla durata	Rendite temporanee
		Rendite illimitate
	Rispetto all'inizio del pagamento o riscossione	Rendite immediate
		Rendite differite
	Rispetto all'entità della rata	Rata costante
		Rata variabile

Relativamente all'assicuratore:	Rendita anticipata: Versamento rate all'inizio del periodo
	Rendita posticipata: Versamento rate alla fine del periodo

Simbologia:

a_x : premio unico puro di un'assicurazione di rendita vitalizia annua a rata costante di 1 lira;

\ddot{a}_x : premio unico puro di un'assicurazione di rendita vitalizia annua a rata costante anticipata di 1 lira.

n. b. per le rendite illimitate non si indica la durata.

Rendita Vitalizia Immediata e Temporanea per n Anni

L'assicurato si garantisce una somma costante, alla fine o all'inizio di ogni anno, se in vita a partire dall'età x (epoca del contratto) e per n anni.

Rendita anticipata:

All'epoca del contratto, essendo in vita, l'assicurato riscuote 1 lira con certezza; dopo un anno, se in vita, riscuoterà un'altra lira e così via, all'inizio di ogni anno, fino all'età x+n-1.

$${}_n\ddot{a}_x : a \text{ con } x \text{ anticipato } n;$$

successione di n assicurazioni a capitale differito di 1 lira \Rightarrow

Premio unico puro = somma dei singoli premi unici puri:

$$\begin{aligned} {}_n\ddot{a}_x &= 1 + {}_1/E_x + {}_2/E_x + \dots + {}_{n-2}/E_x + {}_{n-1}/E_x = \\ &= 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \dots + \frac{D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{D_x + D_{x+1} + \dots + D_{x+n-1}}{D_x} = \frac{\text{somma tronca}}{D_x} \Rightarrow \\ &{}_n\ddot{a}_x = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

Calcolo Premio Unico Puro:

$$U = R \cdot {}_n\ddot{a}_x = R \cdot \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}$$

R = valore della rata

Rendita Posticipata:

Caso analogo al precedente, con la differenza che la prima rata di 1 lira viene riscossa alla fine del primo anno (x+1) e così via fino alla fine (x+n).

n. b. si tratta, in effetti, di una rendita anticipata avente lo stesso numero di rate ed un periodo di differimento in più (n+1); il valore attuariale si può, pertanto, ottenere ponendo nella formula precedente il differimento n+1 al posto di n:

$${}_n a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

Calcolo Premio Unico Puro:

$$U = R \cdot /_n a_x = R \cdot \frac{N_{x+1} - N_{x+n-1}}{D_x}$$

n. b. *a parità di capitale assicurato il premio unico puro di una rendita posticipata è minore del premio unico puro di una rendita anticipata.*

A parità di premio versato la rata di una rendita posticipata è maggiore della rata di una rendita anticipata.

Rendita Illimitata Immediata

L'assicurato si garantisce una somma costante all'inizio o alla fine di ogni anno, se in vita, a partire dall'età x (epoca del contratto) e per tutta la vita.

Può essere vista come una rendita limitata in cui n aumenta sempre più fino ad arrivare ad ω e, risultando $N_{\omega}=0$, si avrà al numeratore, nella formula, una somma intera di D_x :

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x} \quad \Rightarrow \quad U = R \cdot \ddot{a}_x = R \cdot \frac{N_x}{D_x}$$

Se la rendita illimitata è posticipata vale il discorso fatto precedentemente, per cui risulta:

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x} \quad \Rightarrow \quad U = R \cdot a_x = R \cdot \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

REGOLA PRATICA

Il premio unico puro è ottenuto da una funzione che al denominatore ha sempre il valore D_x e la numeratore la differenza tra due valori di N : il primo con indice pari all'età dell'assicurato, nel momento in cui inizia la riscossione della rendita, ed il secondo con indice pari all'età in cui la riscossione termina:

$$a = \frac{N_i - N_f}{D_x}$$

ASSICURAZIONI IN CASO DI MORTE

L'assicurazione è percepita dagli eredi o dai beneficiari dell'assicurato alla sua morte.

Assicurazione Elementare di Morte differita o immediata:

(caso del tutto teorico; è utilizzata come base per i casi più generali) prevede il pagamento del capitale ai beneficiari solo se l'assicurato muore in un anno prefissato, cioè tra l'anno n e l'anno $n+1$ a partire da x (epoca in cui viene stipulato il contratto).

Premio Unico Puro: speranza matematica di riscossione = prodotto del valore attuale del capitale per la sua probabilità di riscossione (probabilità di morte di x differita di n anni e temporanea 1)

$$\begin{aligned} {}_n/1 A_x &= v^{n+1} \cdot {}_n/q_x = v^{n+1} \cdot \frac{d_{x+n}}{I_x} = \\ \frac{v^x}{v^x} \cdot \frac{v^{n+1} \cdot d_{x+n}}{I_x} &= \frac{v^{x+n+1} \cdot d_{x+n}}{v^x \cdot I_x} \Rightarrow {}_n/1 A_x = \frac{C_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

Calcolo Premio Unico Puro:

C = capitale assicurato

$$U = C \cdot \frac{C_{x+n}}{D_x}$$

Se l'assicurazione è immediata si pone il differimento n pari a zero ($n=0$):

$$U = C \cdot \frac{C_x}{D_x}$$

Assicurazione Temporanea differita o temporanea:

Assicurazione differita di m anni che garantisce ai beneficiari il pagamento del capitale alla fine dell'anno di morte dell'assicurato se questo muore tra l'età $x+m$ e l'età $x+m+n$. Equivale ad una serie di n assicurazioni elementari sommate tra loro:

$$\begin{aligned} {}_m/n1 A_x &= \frac{C_{x+m}}{D_x} + \frac{C_{x+m+1}}{D_x} + \dots + \frac{C_{x+m+n-1}}{D_x} = \\ \frac{C_{x+m} + C_{x+m+1} + \dots + C_{x+m+n-1}}{D_x} &= \frac{\text{somma tronca}}{D_x} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \end{aligned}$$

C = capitale assicurato

$$U = C \cdot {}_m / {}_n A_x = C \cdot \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x}$$

Se l'assicurazione è immediata è sufficiente porre il differimento pari a zero (m=0):

$${}_n A_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} \Rightarrow U = C \cdot {}_n A_x = C \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Vita Intera o Illimitata differita o immediata:

Il capitale viene riscosso dai beneficiari a qualunque età l'assicurato muore. Ciò significa che la temporaneità $x+m+n$ ($x+n$ per l'immediata) può arrivare fino al valore ω (età estrema), per cui la formula precedente assume la forma:

$${}_m / A_x = \frac{M_{x+m} - M_{\omega}}{D_x} \Rightarrow (M_{\omega} = 0) \Rightarrow {}_m / A_x = \frac{M_{x+m}}{D_x} \quad \left[A_x = \frac{M_x}{D_x} \right]$$

Con questa forma di assicurazione il premio unico puro per capitale unitario (A_x) aumenta al crescere dell'età x fino a tendere asintoticamente ad 1. In pratica le assicurazioni non stipulano contratti con persone di età superiore ai 65 anni.

Pagamento all'Atto del Decesso:

Forma reale di contratto in base al quale la somma è pagata all'atto della morte e non alla fine dell'anno di morte. Si considera, pertanto, la legge empirica del caso così che il pagamento viene effettuato, mediamente, a metà anno; ciò implica che il pagamento del capitale è da considerarsi precedente di 6 mesi rispetto a quello fine anno di morte e, quindi, l'assicuratore può anticipare il pagamento di un periodo che può arrivare fino ad 1 anno, perdendo i relativi interessi. Per tale motivo il premio viene maggiorato moltiplicandolo per il fattore $u^{1/2}$ ($u=1,04$) in modo da avere il premio corrispondente al capitale pagato all'atto del decesso.

Così nel caso di assicurazione temporanea differita si ha:

$${}_m / \bar{A}_x = {}_m / A_x \cdot u^{1/2} = \frac{M_{x+m} - M_{x+m+n}}{D_x} \cdot u^{1/2}$$

Lo stesso ragionamento si applica alle altre forme di assicurazioni caso morte.

Esempio Esplicativo:

U = ? ; differita = 15 ; temporanea = 8 ; x = 42 ; C = 70.000.000

$$\begin{aligned}U &= C \cdot {}_{15}/_8 A_{42} = C \cdot \frac{M_{50} - M_{65}}{D_{42}} = \\ &= 70.000.000 \cdot \frac{5126,67 - 3369,55}{17783,72} = 6.916.343\end{aligned}$$

Pagamento all'atto di morte:

$$\begin{aligned}U &= C \cdot {}_{15}/_8 \bar{A}_{42} = C \cdot \frac{M_{50} - M_{65}}{D_{42}} \cdot u^{1/2} = \\ &= 70.000.000 \cdot \frac{5126,67 - 3369,55}{17783,72} \cdot 1,04^{1/2} = 7.053.314\end{aligned}$$

$$\Delta = 7.053.314 - 6.916.343 = 136.971$$

ASSICURAZIONI MISTE

Garantiscono un capitale differito all'assicurato ed una somma di denaro agli eredi, qualora l'assicurato muoia prima dell'incasso del capitale.

Possono essere considerate come l'unione di un'assicurazione caso vita ed un'assicurazione caso morte; ciò comporta, per la determinazione del premio unico puro, calcoli analoghi ai precedenti.

Assicurazione Mista Semplice:

L'assicurato assicura a se stesso un capitale differito, se in vita, dopo n anni e la stessa somma ai beneficiari se muore prima di aver riscosso il capitale (cioè tra x e x+n):

$A_{\overline{x+n}|}$ = A con x figurato n : somma dei premi unici puri di un'assicurazione a capitale unitario differito e di un'assicurazione caso morte immediata temporanea n.

$$\begin{aligned} A_{\overline{x+n}|} &= {}_n / E_x + {}_n A_x = \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{D_x + M_x - M_{x+n}}{D_x} \end{aligned}$$

$$U = C \cdot A_{\overline{x+n}|} = C \cdot \frac{D_x + M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Assicurazione Mista Doppia:

L'assicurato garantisce agli eredi un certo capitale se muore entro n anni, superati i quali, se in vita, riscuoterà un capitale doppio di quello assicurato agli eredi

$$\begin{aligned} A_{\overline{(1/2)}\overline{x+n}|} &= {}_n / E_x + (1/2) \cdot {}_n A_x = \\ &= \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x} = \frac{2 \cdot D_x + M_x - M_{x+n}}{2 \cdot D_x} \end{aligned}$$

$$U = C \cdot A_{\overline{(1/2)}\overline{x+n}|} = C \cdot \frac{2 \cdot D_x + M_x - M_{x+n}}{2 \cdot D_x}$$

Assicurazione Mista a Capitale Raddoppiato:

L'assicurato garantisce a se stesso un capitale all'età $x+n$ (assicurazione caso vita a capitale differito) e lo stesso capitale agli eredi, in qualunque momento avviene la sua morte (assicurazione caso morte immediata illimitata)

$$A_{\overline{x+n}|} = {}_n p_x \cdot E_x + A_x = \frac{D_{x+n}}{D_x} + \frac{M_x}{D_x} = \frac{D_x + M_x}{D_x}$$

$$U = C \cdot A_{\overline{x+n}|} = C \cdot \frac{D_x + M_x}{D_x}$$

n. b. *l'assicuratore può pagare due volte il capitale, la prima volta se l'assicurato è vivo all'età $x+n$; la seconda volta, ai beneficiari, alla morte dell'assicurato dopo l'età $x+n$.*

Assicurazione a Termine Fisso o Dotale:

L'assicurato assicura a se stesso o agli eredi, in caso di morte, un certo capitale all'età $x+n$. Si tratta, in questo caso, di una riscossione certa da parte o dell'assicurato o dei beneficiari; il premio unico puro viene, pertanto, calcolato come valore attuale e non attuariale del capitale assicurato

$$U = C \cdot v^n = C \cdot 1,04^{-n}$$

Pagamento all'Atto del Decesso:

Il premio unico puro si calcola moltiplicando la sola assicurazione caso morte per il fattore $u^{1/2}$ (c.f.r. assicurazione mista semplice):

$$\bar{A}_{\overline{x+n}|} = \frac{D_x + (M_x - M_{x+n}) \cdot u^{1/2}}{D_x}$$

Tavola Demografica Italia 1981 m

x	l_x	d_x	p_x	q_x	e_x	e°_x
0	100.000	1.533	0,98467	0,01533	70,55	71,05
1	98.467	76	0,99923	0,00077	70,65	71,15
2	98.391	52	0,99947	0,00053	69,70	70,20
3	98.339	39	0,99960	0,00040	68,74	69,24
4	98.300	33	0,99966	0,00034	67,76	68,26
5	98.267	32	0,99967	0,00033	66,79	67,29
6	98.235	30	0,99969	0,00031	65,81	66,31
7	98.205	29	0,99970	0,00030	64,83	65,33
8	98.176	29	0,99970	0,00030	63,85	64,35
9	98.147	27	0,99972	0,00028	62,87	63,37
10	98.120	27	0,99972	0,00028	61,88	62,38
11	98.093	26	0,99973	0,00027	60,90	61,40
12	98.067	30	0,99969	0,00031	59,92	60,42
13	98.037	39	0,99960	0,00040	58,94	59,44
14	97.998	51	0,99948	0,00052	57,96	58,46
15	97.947	68	0,99931	0,00069	56,99	57,49
16	97.879	88	0,99910	0,00090	56,03	56,53
17	97.791	101	0,99897	0,00103	55,08	55,58
18	97.690	111	0,99886	0,00114	54,14	54,64
19	97.579	112	0,99885	0,00115	53,20	53,70
20	97.467	107	0,99890	0,00110	52,26	52,76
21	97.360	106	0,99891	0,00109	51,32	51,82
22	97.254	106	0,99891	0,00109	50,37	50,87
23	97.148	102	0,99895	0,00105	49,43	49,93
24	97.046	101	0,99896	0,00104	48,48	48,98
25	96.945	98	0,99899	0,00101	47,53	48,03
26	96.847	95	0,99902	0,00098	46,58	47,08
27	96.752	95	0,99902	0,00098	45,62	46,12
28	96.657	94	0,99903	0,00097	44,67	45,17
29	96.563	95	0,99902	0,00098	43,71	44,21
30	96.468	95	0,99902	0,00098	42,75	43,25
31	96.373	100	0,99896	0,00104	41,80	42,30
32	96.273	103	0,99893	0,00107	40,84	41,34
33	96.170	104	0,99892	0,00108	39,88	40,38
34	96.066	112	0,99883	0,00117	38,93	39,43
35	95.954	117	0,99878	0,00122	37,97	38,47
36	95.837	128	0,99866	0,00134	37,02	37,52
37	95.709	144	0,99850	0,00150	36,07	36,57
38	95.565	162	0,99830	0,00170	35,12	35,62

x	l_x	d_x	p_x	q_x	e_x	e°_x
39	95.403	179	0,99812	0,00188	34,18	34,68
40	95.224	199	0,99791	0,00209	33,25	33,75
41	95.025	218	0,99771	0,00229	32,32	32,82
42	94.807	240	0,99747	0,00253	31,39	31,89
43	94.567	264	0,99721	0,00279	30,47	30,97
44	94.303	300	0,99682	0,00318	29,56	30,06
45	94.003	341	0,99637	0,00363	28,65	29,15
46	93.662	388	0,99586	0,00414	27,75	28,25
47	93.274	437	0,99531	0,00469	26,87	27,37
48	92.837	485	0,99478	0,00522	26,00	26,50
49	92.352	530	0,99426	0,00574	25,13	25,63
50	91.822	590	0,99357	0,00643	24,28	24,78
51	91.232	658	0,99279	0,00721	23,43	23,93
52	90.574	733	0,99191	0,00809	22,61	23,11
53	89.841	809	0,99100	0,00900	21,79	22,29
54	89.032	891	0,98999	0,01001	20,99	21,49
55	88.141	976	0,98893	0,01107	20,20	20,70
56	87.165	1.070	0,98772	0,01228	19,43	19,93
57	86.095	1.155	0,98658	0,01342	18,67	19,17
58	84.940	1.235	0,98546	0,01454	17,92	18,42
59	83.705	1.360	0,98375	0,01625	17,19	17,69
60	82.345	1.446	0,98244	0,01756	16,47	16,97
61	80.899	1.541	0,98095	0,01905	15,76	16,26
62	79.358	1.628	0,97949	0,02051	15,07	15,57
63	77.730	1.712	0,97798	0,02202	14,39	14,89
64	76.018	1.823	0,97602	0,02398	13,71	14,21
65	74.195	1.971	0,97343	0,02657	13,05	13,55
66	72.224	2.094	0,97101	0,02899	12,40	12,90
67	70.130	2.226	0,96826	0,03174	11,77	12,27
68	67.904	2.346	0,96545	0,03455	11,16	11,66
69	65.558	2.483	0,96213	0,03787	10,56	11,06
70	63.075	2.658	0,95786	0,04214	9,97	10,47
71	60.417	2.817	0,95337	0,04663	9,41	9,91
72	57.600	2.982	0,94823	0,05177	8,87	9,37
73	54.618	3.122	0,94284	0,05716	8,36	8,86
74	51.496	3.236	0,93716	0,06284	7,86	8,36
75	48.260	3.324	0,93112	0,06888	7,39	7,89
76	44.936	3.428	0,92371	0,07629	6,94	7,44
77	41.508	3.460	0,91664	0,08336	6,51	7,01
78	38.048	3.453	0,90925	0,09075	6,10	6,60
79	34.595	3.417	0,90123	0,09877	5,71	6,21

SABO

x	lx	dx	px	qx	ex	e°x
80	31.178	3.354	0,89242	0,10758	5,34	5,84
81	27.824	3.274	0,88233	0,11767	4,98	5,48
82	24.550	3.139	0,87214	0,12786	4,65	5,15
83	21.411	2.973	0,86115	0,13885	4,33	4,83
84	18.438	2.777	0,84939	0,15061	4,02	4,52
85	15.661	2.556	0,83679	0,16321	3,74	4,24
86	13.105	2.316	0,82327	0,17673	3,47	3,97
87	10.789	2.061	0,80897	0,19103	3,21	3,71
88	8.728	1.801	0,79365	0,20635	2,97	3,47
89	6.927	1.543	0,77725	0,22275	2,74	3,24
90	5.384	1.293	0,75984	0,24016	2,53	3,03
91	4.091	1.057	0,74163	0,25837	2,33	2,83
92	3.034	843	0,72215	0,27785	2,14	2,64
93	2.191	654	0,70151	0,29849	1,96	2,46
94	1.537	492	0,67990	0,32010	1,79	2,29
95	1.045	359	0,65646	0,34354	1,63	2,13
96	686	252	0,63265	0,36735	1,49	1,99
97	434	170	0,60829	0,39171	1,35	1,85
98	264	110	0,58333	0,41667	1,23	1,73
99	154	69	0,55195	0,44805	1,10	1,60
100	85	40	0,52941	0,47059	1,00	1,50
101	45	23	0,48889	0,51111	0,89	1,39
102	22	11	0,50000	0,50000	0,82	1,32
103	11	6	0,45455	0,54545	0,64	1,14
104	5	3	0,40000	0,60000	0,40	0,90
105	2	(2)				

Tavole Demografico - Finanziarie Italia 1981 m						
tasso di interesse usato $i = 4,00\%$						
x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
0	100.000	1.533	100.000,00	2.377.715,73	1.474,04	8.549,36
1	98.467	76	94.679,81	2.277.715,73	70,27	7.075,33
2	98.391	52	90.968,01	2.183.035,92	46,23	7.005,06
3	98.339	39	87.423,01	2.092.067,91	33,34	6.958,83
4	98.300	33	84.027,25	2.004.644,90	27,12	6.925,49
5	98.267	32	80.768,31	1.920.617,65	25,29	6.898,37
6	98.235	30	77.636,55	1.839.849,34	22,80	6.873,08
7	98.205	29	74.627,73	1.762.212,79	21,19	6.850,28
8	98.176	29	71.736,24	1.687.585,06	20,38	6.829,09
9	98.147	27	68.956,78	1.615.848,82	18,24	6.808,72
10	98.120	27	66.286,36	1.546.892,04	17,54	6.790,48
11	98.093	26	63.719,34	1.480.605,68	16,24	6.772,94
12	98.067	30	61.252,36	1.416.886,34	18,02	6.756,70
13	98.037	39	58.878,48	1.355.633,98	22,52	6.738,68
14	97.998	51	56.591,40	1.296.755,50	28,32	6.716,16
15	97.947	68	54.386,49	1.240.164,10	36,31	6.687,84
16	97.879	88	52.258,40	1.185.777,60	45,18	6.651,54
17	97.791	101	50.203,28	1.133.519,20	49,86	6.606,36
18	97.690	111	48.222,53	1.083.315,92	52,69	6.556,50
19	97.579	112	46.315,13	1.035.093,39	51,12	6.503,82
20	97.467	107	44.482,67	988.778,26	46,96	6.452,70
21	97.360	106	42.724,84	944.295,59	44,73	6.405,75
22	97.254	106	41.036,85	901.570,75	43,01	6.361,02
23	97.148	102	39.415,50	860.533,90	39,79	6.318,01
24	97.046	101	37.859,73	821.118,40	37,89	6.278,22
25	96.945	98	36.365,70	783.258,67	35,35	6.240,33
26	96.847	95	34.931,67	746.892,97	32,95	6.204,99
27	96.752	95	33.555,20	711.961,30	31,68	6.172,04
28	96.657	94	32.232,93	678.406,11	30,14	6.140,36
29	96.563	95	30.963,06	646.173,17	29,29	6.110,22
30	96.468	95	29.742,89	615.210,11	28,16	6.080,93
31	96.373	100	28.570,76	585.467,23	28,51	6.052,76
32	96.273	103	27.443,38	556.896,46	28,23	6.024,26
33	96.170	104	26.359,64	529.453,08	27,41	5.996,03
34	96.066	112	25.318,40	503.093,44	28,38	5.968,62
35	95.954	117	24.316,23	477.775,05	28,51	5.940,23
36	95.837	128	23.352,48	453.458,82	29,99	5.911,72
37	95.709	144	22.424,32	430.106,34	32,44	5.881,73
38	95.565	162	21.529,40	407.682,02	35,09	5.849,29

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
39	95.403	179	20.666,26	386.152,62	37,28	5.814,20
40	95.224	199	19.834,12	365.486,37	39,86	5.776,92
41	95.025	218	19.031,41	345.652,25	41,98	5.737,06
42	94.807	240	18.257,45	326.620,84	44,44	5.695,08
43	94.567	264	17.510,80	308.363,39	47,00	5.650,64
44	94.303	300	16.790,30	290.852,59	51,36	5.603,64
45	94.003	341	16.093,16	274.062,28	56,13	5.552,28
46	93.662	388	15.418,06	257.969,12	61,41	5.496,14
47	93.274	437	14.763,65	242.551,05	66,51	5.434,73
48	92.837	485	14.129,31	227.787,41	70,98	5.368,22
49	92.352	530	13.514,90	213.658,10	74,58	5.297,24
50	91.822	590	12.920,51	200.143,21	79,83	5.222,67
51	91.232	658	12.343,74	187.222,69	85,60	5.142,84
52	90.574	733	11.783,38	174.878,95	91,69	5.057,24
53	89.841	809	11.238,48	163.095,57	97,31	4.965,54
54	89.032	891	10.708,92	151.857,09	103,05	4.868,23
55	88.141	976	10.193,99	141.148,17	108,54	4.765,19
56	87.165	1.070	9.693,38	130.954,17	114,42	4.656,65
57	86.095	1.155	9.206,14	121.260,79	118,75	4.542,23
58	84.940	1.235	8.733,30	112.054,65	122,10	4.423,48
59	83.705	1.360	8.275,31	103.321,35	129,28	4.301,38
60	82.345	1.446	7.827,75	95.046,04	132,17	4.172,10
61	80.899	1.541	7.394,51	87.218,29	135,44	4.039,93
62	79.358	1.628	6.974,67	79.823,78	137,58	3.904,49
63	77.730	1.712	6.568,83	72.849,11	139,11	3.766,91
64	76.018	1.823	6.177,07	66.280,27	142,44	3.627,80
65	74.195	1.971	5.797,06	60.103,20	148,08	3.485,36
66	72.224	2.094	5.426,02	54.306,14	151,27	3.337,29
67	70.130	2.226	5.066,06	48.880,13	154,62	3.186,02
68	67.904	2.346	4.716,59	43.814,07	156,69	3.031,40
69	65.558	2.483	4.378,50	39.097,48	159,46	2.874,72
70	63.075	2.658	4.050,64	34.718,98	164,13	2.715,26
71	60.417	2.817	3.730,71	30.668,34	167,26	2.551,13
72	57.600	2.982	3.419,97	26.937,63	170,24	2.383,87
73	54.618	3.122	3.118,19	23.517,66	171,38	2.213,63
74	51.496	3.236	2.826,87	20.399,47	170,81	2.042,25
75	48.260	3.324	2.547,34	17.572,60	168,70	1.871,44
76	44.936	3.428	2.280,66	15.025,26	167,29	1.702,73
77	41.508	3.460	2.025,65	12.744,60	162,36	1.535,44
78	38.048	3.453	1.785,38	10.718,95	155,80	1.373,08
79	34.595	3.417	1.560,92	8.933,56	148,24	1.217,29

SABO

x	l_x	d_x	D_x	N_x	C_x	M_x
80	31.178	3.354	1.352,64	7.372,65	139,91	1.069,04
81	27.824	3.274	1.160,70	6.020,01	131,32	929,13
82	24.550	3.139	984,73	4.859,31	121,07	797,80
83	21.411	2.973	825,79	3.874,58	110,25	676,74
84	18.438	2.777	683,78	3.048,79	99,02	566,48
85	15.661	2.556	558,45	2.365,02	87,64	467,46
86	13.105	2.316	449,33	1.806,57	76,36	379,82
87	10.789	2.061	355,70	1.357,23	65,33	303,46
88	8.728	1.801	276,68	1.001,53	54,90	238,13
89	6.927	1.543	211,14	724,85	45,22	183,23
90	5.384	1.293	157,80	513,71	36,44	138,01
91	4.091	1.057	115,29	355,91	28,64	101,57
92	3.034	843	82,21	240,62	21,96	72,93
93	2.191	654	57,09	158,40	16,38	50,96
94	1.537	492	38,51	101,32	11,85	34,58
95	1.045	359	25,17	62,81	8,32	22,73
96	686	252	15,89	37,63	5,61	14,41
97	434	170	9,67	21,74	3,64	8,80
98	264	110	5,65	12,08	2,27	5,16
99	154	69	3,17	6,42	1,37	2,89
100	85	40	1,68	3,25	0,76	1,53
101	45	23	0,86	1,57	0,42	0,77
102	22	11	0,40	0,71	0,19	0,34
103	11	6	0,19	0,31	0,10	0,15
104	5	3	0,08	0,12	0,05	0,05
105	2	(2)	0,03	0,03	0,00	0,00

RISERVA MATEMATICA

Valore di una polizza di un'assicurazione calcolato s anni dopo la stipulazione del contratto.

Interpretazione della Riserva Matematica

per l'assicurato: credito netto nei confronti dell'assicuratore;

per l'assicuratore: accantonamento di premi \equiv rimanenza finale passiva nel bilancio;

Motivazione della Riserva Matematica

Motivo legale: è imposta obbligatoriamente dallo Stato tramite la costituzione di fondi atti ad evitare speculazioni e a superare eventi imprevisi che si possono risolvere in un danno nei confronti dell'assicurato.

Motivo tecnico: rappresenta la base di calcolo per eventuali trasformazioni o modifiche di una polizza di assicurazione; costituisce il premio unico per il nuovo contratto o la base per la liquidazione in caso di riscatto del contratto.

Definizioni di Riserva Matematica

Riserva Matematica Pura: riserva calcolata in base ai premi puri.

Riserva Matematica Completa: riserva calcolata in base ai premi caricati.

$$R. M. Pura > R. M. Completa$$

n. b. *la riserva matematica pura è tanto più grande quanto minore è il premio da pagare all'assicurato.*

Calcolo della Riserva Matematica

suddivisione del premio unico puro in:

$$P. U. parziale + P. U. residuo \Rightarrow U = {}_sU + U_s \cdot {}_sE_x$$

Premio Unico Parziale: valore attuale attuariale, calcolato all'età x, delle prestazioni previste a carico dell'assicuratore per il periodo da x a x+s.

Premio Unico Residuo: valore attuale attuariale, calcolato all'età x+s, delle prestazioni previste a carico dell'assicuratore per il periodo da x+s a x+n.

Metodi di Calcolo

x : epoca di stipulazione del contratto		V_{x+s} : riserva al tempo x+s
x+s : epoca di calcolo della riserva		

Metodo Prospettivo		stesso risultato finale
Metodo Retrospektivo		

calcolo della riserva su		Premio unico
		Premio annuo

n. b. *in realtà per il calcolo della riserva l'assicuratore considera solo i premi puri e non quelli effettivamente riscossi.*

Calcolo con il Metodo Prospettivo: per il premio unico puro, riserva calcolata all'età x+s come differenza dei valori attuali degli impegni futuri dell'assicuratore (pari al premio unico puro che l'assicurato dovrebbe pagare se stipulasse il contratto all'età x+s) e degli impegni futuri dell'assicurato (pari a zero, avendo egli già assolto l'impegno alla stipulazione del contratto)

Riserva per polizza liberata

$$V_{x+s} = U_{x+s} - 0$$

n. b. *nel calcolo si sostituisce al termine U_{x+s} il valore relativo al tipo di assicurazione stipulata, considerando come partenza l'età x+s invece dell'età x.*

Calcolo con il Metodo Retrospektivo: per il premio unico puro, riserva calcolata come differenza tra i montanti degli impegni assolti dall'assicurato e dell'assicuratore tra l'età x e l'età x+s. In pratica si determina, all'età x, il valore attuale di tali impegni, si calcola la loro differenza e la si riporta all'età della riserva (x+s) moltiplicandola per il fattore di capitalizzazione attuariale:

$$\frac{1}{s/E_x} = \frac{D_x}{D_{x+s}}$$

Nel caso del premio unico puro l'impegno dell'assicurato è dato dal pagamento del premio U che, essendo avvenuto all'età x , rappresenta il valore attuale di tale impegno.

Per l'assicuratore si possono avere due casi:

- Impegno assolto (assicurazioni differite con differimento superiore all'epoca della riserva $p > s$); in questo caso si ha:

$$V_{x+s} = (U - 0) \cdot \frac{1}{s/E_x} \Rightarrow V_{x+s} = \frac{U}{s/E_x}$$

- Impegni ancora da assolvere (assicurazioni immediate o miste); in questo caso si ha:

$$V_{x+s} = (U - I) \cdot \frac{1}{s/E_x}$$

I = valore attuale, all'età x , degli impegni futuri dell'assicuratore tra l'età x e l'età $x+s$.

- n. b.** *nel calcolo si sostituisce al termine U il valore relativo al tipo di assicurazione stipulata, considerando come partenza l'età $x+s$ invece dell'età x .*

Considerazioni Conclusive

I due metodi di calcolo conducono allo stesso risultato, per cui l'applicazione di un metodo piuttosto che l'altro è dettata, essenzialmente, dalla convenienza del calcolo (vedi il calcolo dell'assicurazione differita con differimento superiore all'epoca della riserva, per la quale conviene il metodo retrospettivo).

In prima approssimazione indicando con:

i_f : impegni futuri dell'assicurato

I_a : impegni assolti dall'assicuratore

se risulta:

$i_f = 0 \Rightarrow$ conviene utilizzare il metodo prospettivo

$I_a = 0 \Rightarrow$ conviene utilizzare il metodo retrospettivo