METODI DI RISOLUZIONE DI SISTEMI

Classe II   a. s. ‘10/’11   prof.ssa R. Schettino

METODI DI RISOLUZIONE

- Esistono quattro metodi per risolvere un sistema lineare in due incognite

- a) metodo di Cramer

  b) metodo di sostituzione

  c) metodo del confronto

  d) metodo di addizione e sottrazione

PREMESSA

- Le prossime diapositive danno esclusivamente regole pratiche ed immediate per l'applicazione dei metodi risolutivi di sistemi lineari
- Tali regole vanno applicate quando il sistema dato è ridotto in forma normale
- Analizzare bene gli esempi che danno la correttezza di tutti i passaggi
- Negli esempi sono stati applicati anche due metodi nella risoluzione della stesso sistema

METODO DI CRAMER

- Questo metodo fa uso delle matrici e dei determinanti

- Una volta assicurati che il sistema è risolubile perché i ranghi delle matrici incompleta e completa sono uguali, si applicano le seguenti formule:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} \quad ; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

METODO DI CRAMER

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$$ det. della M.I.

$$\Delta x = \begin{vmatrix} c & b \\ c_1 & b_1 \end{vmatrix}$$ det. che si ottiene ponendo nella 1^a colonna i termini noti

$$\Delta \mathrm{y} = \begin{vmatrix} \mathrm{a} & \mathrm{c} \\ \mathrm{a}_1 & c_1 \end{vmatrix}$$ det. che si ottiene ponendo nella 2^a colonna i termini noti

ESEMPI

Il seguente sistema è risolvibile perché i ranghi delle matrici valgono entrambi 2

$$\begin{cases} 4x+12y-4=0 \\ x-y-5=0 \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-4-12=-16$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}=-4-60=-64$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=20-4=16$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{64}{16} = 4$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{16}{16} = -1$$

Soluzione del sistema : x=4; y=-1

ESEMPI

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ \\ 9x + 3y = -1 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 18 = 33$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 2 = 7$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 9 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 27 = -32$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{7}{33}$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = -\frac{32}{33}$$

Questa è la coppia di numeri soluzione del sistema

METODO DI SOSTITUZIONE

- Si procede in più passaggi:

1. Si ricava un’incognita da un’equazione
2. Si sostituisce nell’altra equazione che diventa così in una sola incognita
3. Si risolve quest ’ equazione secondo le regole già note
4. Il valore trovato lo si sostituisce nella equazione iniziale

ESEMPI

$$\begin{cases} 4x + 12y - 4 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ 4(y + 5) + 12y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ 4y + 20 + 12y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ 16y + 16 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y + 5 \\ y = -\dfrac{16}{16} = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + 5 = 4 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

ESEMPI

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 3(5 - 3x) = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ 2x + 15 - 9x = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ -7x = -7 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 5 - 3x \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \end{cases}$$

METODO DEL CONFRONTO

- Si procede in più passaggi:

1. Si ricava un'incognita dalla prima equazione
2. Si ricava la stessa incognita dalla seconda equazione
3. Si uguagliano le espressioni così ottenute e che costituiscono un'equazione in una sola incognita
4. Si risolve quest'equazione secondo le regole già note
5. Si sostituisce il valore trovato in una delle due equazioni determinando il valore dell'altra incognita

ESEMPIO

(qui è stata applicata anche una sostituzione nell'ultimo passaggio)

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x+3y=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=5\text{-}3x \\ y=\dfrac{8-2x}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-3x=\dfrac{8-2x}{3} \\ y=5-3x \end{cases}$$

$$\begin{cases} 15-9x=8-2x \\ y=5-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -7x=-7 \\ y=5-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$$

METODO DI ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

- Si applica quando i coefficienti di una stessa incognita nelle due equazioni sono uguali o opposti (se non lo sono, si moltiplica una delle due equazioni per un opportuno coefficiente non nullo, in modo da renderli tali)
- Si addizionano (risp. sottraggono) membro a membro le equazioni del sistema se i coefficienti sono opposti (risp. uguali) in modo che un'incognita si elimina e rimane un'equazione con solo l'altra incognita
- Si risolve quest'equazione determinando il valore della incognita che poi va sostituito in una delle due equazioni per determinare il valore dell'incognita rimanente

ESEMPIO
(qui è stata applicata una sostituzione nel penultimo passaggio)

$$\begin{cases} 3x+1=4y \\ 6x+2y-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-4y=-1 \\ 6x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(3x-4y)=2(-1) \\ 6x+2y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x-8y=-2 \\ 6x+2y=3 \end{cases} \quad \text{sottrendo membro a membro} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -10y=-5 \\ 6x+2y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ 6x+1=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{1}{2} \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$