Premessa

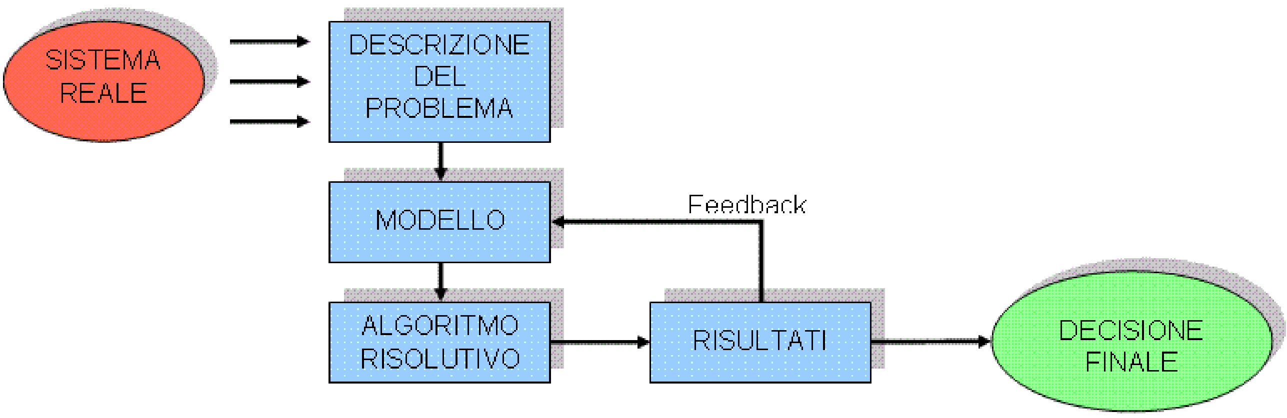
Questa breve trattazione non vuole costituire una guida completa ed esauriente sull'argomento, ma vuole fornire solamente i concetti fondamentali necessari per il raggiungimento degli obiettivi del programma di matematica applicata della quinta Igea.

La ricerca operativa

Il termine Ricerca Operativa, dall'inglese Operations Research, letteralmente "ricerca delle operazioni", fu coniato per esprimere il significato di "determinazione delle attività" da svolgere nel processo di soluzione dei problemi decisionali (decision problem solving) che si rendono necessarie nella gestione di risorse limitate su impieghi alternativi.

La Ricerca Operativa nasce infatti come applicazione di modelli matematici a problemi di decisione durante la Seconda Guerra Mondiale per la risoluzione di problemi organizzativi e gestionali in campo bellico. Le applicazioni furono numerose e in particolare legate allo studio delle intercettazioni radar per la protezione dagli attacchi aerei, alle azioni antisommergibili, al dimensionamento dei convogli navali, alla scelta dei bersagli e ai metodi di avvistamento aereo. Dal dopoguerra in poi la ricerca operativa venne impiegata oltre al settore militare a molteplici settori civili, quali il settore portuale (nella pianificazione delle attività e nella gestione dei porti, dei rifornimenti e delle manutenzioni), il settore industriale-agricolo (standardizzazione della produzione, programmazione e organizzazione industriale), il settore pubblico di trasporto viario e ferroviario, per il quale la ricerca operativa ha fornito modelli di tipo territoriale urbanistico e il settore economico.

Il Processo Decisionale con cui opera la Ricerca Operativa nell'affrontare un problema reale consiste nel costruire un modello matematico del sistema. In particolare il processo decisionale si compone di un'articolata sequenza di fasi.



La prima fase del processo è costituita *dall'analisi del sistema*, cioè dalla definizione delle sue componenti, dei parametri che lo caratterizzano e dalle relazioni tra essi intercorrenti.

Nelle fasi successive si definisce il problema decisionale all'interno del sistema, se ne individuano i parametri che esprimono l'oggetto della decisione, cioè le variabili decisionali del problema, e l'insieme dei dati, cioè l'insieme di valori dei parametri noti che non costituiscono oggetto di decisione.
A partire dai dati e dalle variabili è possibile costruire un criterio di prestazione del sistema da ottimizzare. L'ottimizzazione del criterio di prestazione è limitata dalla necessità di rispettare un insieme di vincoli definiti all'interno del sistema stesso e posti al suo funzionamento. Il modello matematico si presenta quindi costituito da una funzione obiettivo e da un sistema di relazioni vincolari che rappresentano i vincoli del problema.
Risolvere un modello significa determinare il valore delle variabili decisionali in modo da rendere ottimo (massimi e minimo) il valore della funzione obiettivo, nel rispetto dei vincoli. La soluzione del modello viene effettuata con un metodo, o algoritmo.
Un algoritmo è una successione di operazioni finalizzata alla determinazione delle variabili decisionali contenute nel modello. Gli algoritmi possono essere di tipo esatto o euristico. La procedura risolutiva genera risultati numerici che costituiscono la soluzione del modello e rappresentano l'espressione quantitativa della decisione da adottare. I risultati vengono analizzati ed interpretati al fine di verificare la qualità della soluzione e il suo impatto nel sistema oggetto di studio.
Se i vincoli e la funzione obiettivo del modello sono lineari si parla di problemi di Programmazione Lineare. Nella nostra trattazione noi ci occuperemo principalmente di questi problemi, anche se ne esistono di altri.

* *Problemi di Programmazione Lineare*: le variabili assumono valori reali --> FACILI (tempi di soluzione nel caso peggiore polinomiali)
* *Problemi di Flusso*: le variabili possono assumere valori interi --> FACILI (tempi di soluzione nel caso peggiore polinomiali) --> matrici dei vincoli particolari
* *Problemi di Programmazione Lineare Intera*: le variabili assumono valori discreti --> DIFFICILI (tempi di soluzione nel caso peggiore esponenziali)

Per gli obiettivi prefissati nella programmazione dipartimentale ci occuperemo principalmente dei problemi di decisione.

Problemi di decisione
La ricerca operativa parte dal prendere una decisione riguardante il funzionamento di un sistema per un certo periodo di tempo tenendo conto di alcuni aspetti significativi, tra cui:

* fisico-tecnici;
* economici;
* sociali;
* ambientali;
* ...

L'obiettivo sta nel cercare la soluzione più conveniente tra tutte quelle ammissibili. Questo porta alla determinazione dei modelli di ottimizzazione.
Un problema di Ottimizzazione consiste nel determinare, se esiste, un punto di minimo della funzione f (generica funzione che va da uno spazio reale n-dimensionale a uno

spazio reale) tra i punti di un insieme incluso strettamente in uno spazio reale n-dimensionale.

Le variabili decisionali

Le variabili decisionali possono essere di due tipi:

1. CONTINUE:
   * Altezza
   * Tempo
   * Quantità di materiale
   * ...
2. DISCRETE:
   * Scegliere tra n tipi di impianti differenti
   * Fare o non fare canali di collegamento
   * Fare o non fare la strada
   * ...

I vincoli possono essere di varia natura: fisico-tecnologica, economica, normativo.

* vincoli fisici: i volumi d'acqua trasferiti da un bacino A ad uno B non devono superare la capacità della rete idrica che collega i due bacini.
* vincoli economici: il costo dell'autostrada non deve superare lo stanziamento del ministero.
* vincoli normativi: gli impianti di depurazione vanno progettati nel rispetto della normativa sugli scarichi.

Di solito sono esprimibili con relazioni di uguaglianza o disuguaglianza tra variabili.

Gli obiettivi possono essere di:

* MINIMIZZAZIONE (ad esempio: costi e scarti)

* MASSIMIZZAZIONE (ad esempio: ricavo e affidabilità)

Assegnato un criterio di valutazione posso produrre una ENUMERAZIONE ESAUSTIVA delle soluzioni:

* *Caso con variabili continue*: le possibili soluzioni sono infinite (nel migliore dei casi la complessità computazionale è polinomiale).
* *Caso con variabili discrete*: il numero di possibili soluzioni è finito (in generale la complessità computazionale è dell'ordine di n! dove n è il numero di variabili).

Nel caso continuo, a differenza del caso discreto, esiste comunque l'algoritmo di risoluzione.

Esempio: trovare la migliore sequenza di esecuzione di n lavori su una macchina.

L'obiettivo è minimizzare i tempi di set-up per utilizzare la macchina per due lavori differenti.
Nel caso di enumerazione esaustiva le possibili soluzioni sono n!.
Per rendere l'idea dell'importanza di trovare un algoritmo risolutivo: basti prendere a dimostrazione n=100 e un calcolatore in grado di analizzare una sequenza in un nano secondo impiegherebbe addirittura secoli. Tali soluzioni sono dette NP-Hard (Non polinomial hard): su questi problemi è infatti impossibile trovare soluzioni in tempi polinomiali, ma solo esponenziali.
Un algoritmo efficiente richiederebbe tempi polinomiali nella dimensione dell'istanza.

Teoria delle scelte e ottimizzazione in ambito statico

Problema di ottimizzazione

Siano dati:

$X \subseteq R^n$	insieme delle soluzioni ammissibili (regione ammissibile)
$f : X \rightarrow R$	funzione obiettivo (funzione costo)
$\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$	vettore di variabili decisionali (scelte possibili, decisioni o alternative)

Per convenzione, definiamo un problema di ottimizzazione di minimo come:

$$\min_{\underline{x} \in X} f(\underline{x})$$

Si può massimizzare la funzione obiettivo attraverso la minimizzazione della stessa nel seguente modo:

$$\max_{\underline{x} \in X} f(\underline{x}) \rightarrow -\min_{\underline{x} \in X} \; -f(\underline{x})$$

I vincoli (determinazione della regione ammissibile)

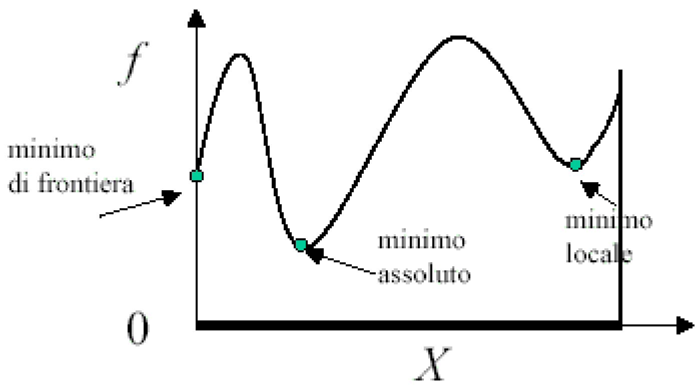
In un problema reale le risorse disponibili tipicamente rappresentanti i vincoli del problema sono risorse scarse, disponibili cioè in quantità limitata.
La regione ammissibile può essere descritta come:

1. Definendo le proprietà di $x \in X$
2. Servendosi di equazioni e disequazioni:

$$x := \begin{cases} x \in R^n : g_i(\underline{x}) \leq 0, (i = 1, \ldots, l) \\ \qquad\quad h_j(\underline{x}) \leq 0, (j = 1, \ldots, p) \end{cases}$$

Ottimi (minimi) locali e globali

La minimizzazione della funzione obiettivo porta alla determinazione (ottimo globale) tale che:



* In generale f ed X possono essere qualsiasi
* Possono esistere ottimi (minimi) locali e globali
* Non è detto che x ottimo esista (X=Æ) e che sia unico.

Casistiche

A seconda del tipo di funzione obiettivo f(x), i vincoli di uguaglianza hj(x) e di disuguaglianza gi(x), si possono avere diverse tipologie di problema di ottimizzazione:

f	**gi(x)**	**hj(x)**	**Programmazione**
convessa	concava	lineare	convessa
lineare	lineare	lineare	lineare
non lineare	non lineare	non lineare	non lineare

Esempio di problema di programmazione lineare

Sia dato il problema ....

dove funzione obiettivo e vincoli sono lineari su ....

Il caso continuo genera una regione ammissibile di tipo CONVESSO. In questo caso la soluzione ottima, è ottenuta dall'intersezione di un numero finito di samipiani ed iperpiano, e' sempre e solo su un vertice del poliedro convesso rappresentante la regione ammissibile.

Per determinare l'ottimo e' sufficiente prendere in considerazione i vertici della regione ammissibile. In particolare la soluzione ottima è il vertice della regione ammissibile in cui la funzione obiettivo raggiunge il massimo punto di tangenza nella direzione del gradiente (problema di massimo) o dell'antigradiente (problema di minimo).

Programmazione lineare

In un problema di programmazione lineare la funzione obiettivo e i vincoli sono lineari. In generale la funzione obiettivo è:

$$\min\ c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

e i vincoli sono:

$$m \text{ vincoli lineari di uguaglianza} \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$
$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

In forma matriciale (*forma standard*):

$$\begin{gathered} \min\ z(\underline{x}) = \underline{c}^T\,\underline{x} \\ A\underline{x} = \underline{b} \\ \underline{x} \geq \mathbf{0} \end{gathered}$$

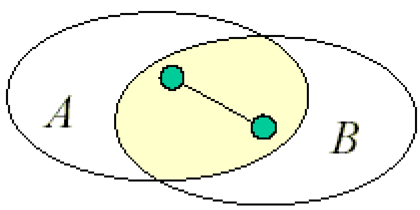
dove:

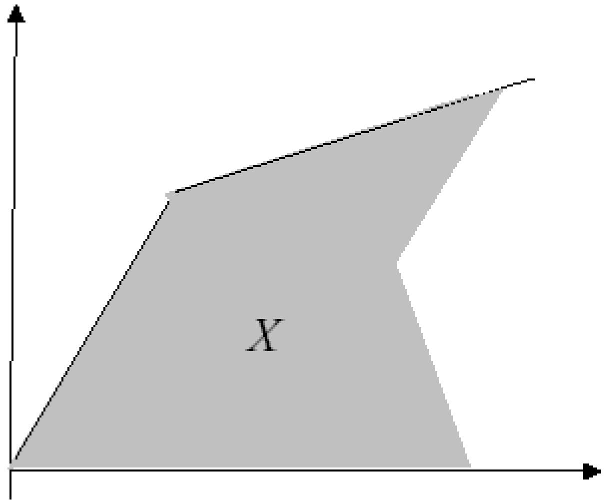
$$\underline{c}, \underline{x} \in R^n, \qquad \underline{b} \in R^m, \qquad A = \text{matrice m x n}$$
$$X = \{\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \mathbf{0}\} \rightarrow \text{insieme delle soluzioni ammissibili}$$

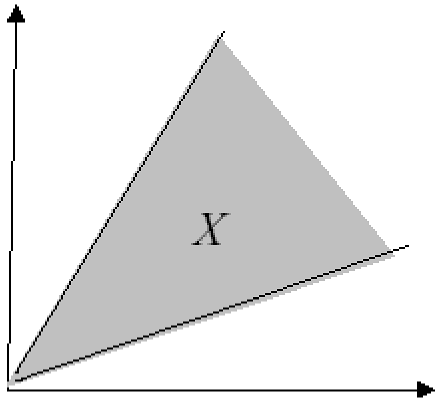
Insiemi convessi

Proprietà: l'intersezione di due insiemi convessi è un insieme *convesso*.

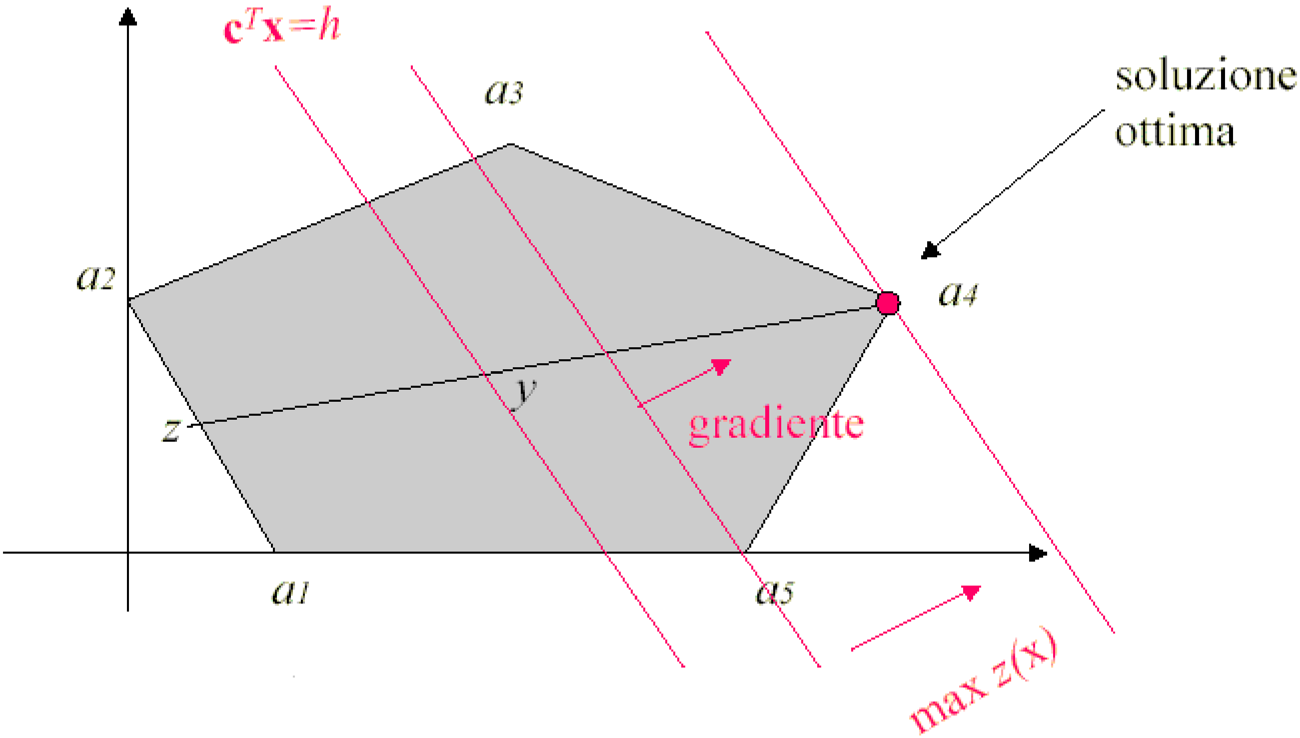
$$X = \{\underline{x} : A\underline{x} = \underline{b}, \underline{x} \geq \mathbf{0}\}$$







La regione ammissibile in condizioni di programmazione lineare diventa un ***poliedro convesso***.



Soluzione di un problema di Programmazione Lineare

Un problema di P.L. a due o tre variabili può essere risolto, oltre che algebricamente, anche con un metodo chiamato METODO GRAFICO.

Le fasi di risoluzione di un problema di P.L. mediante tale metodo sono:

- INDIVIDUAZIONE DELLE INCOGNITE
- COSTRUZIONE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA DEI DATI
- TRADUZIONE ALGEBRICA DEI VINCOLI
- RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI VINCOLI
- INDIVIDUAZIONE DEL CAMPO DI SCELTA O REGIONE AMMISSIBILE
- RICERCA DEL VERTICE O PARTI DI FRONTIERA CHE OTTIMIZZINO
- CALCOLO DEL VALORE OTTIMALE

Prima di procedere con l'esposizione del metodo grafico può risultare utile fare alcuni richiami.

RICHIAMI

Vengono qui richiamati alcuni concetti sulle disequazioni a 2 o 3 variabili e sulla localizzazione dei massimi o minimi delle funzioni lineari a 1,2 o 3 variabili, considerati in poligoni o poliedri convessi.

Tali concetti sono utilizzati in alcune fasi del metodo grafico.

Ogni equazione del tipo $ax+by+c = 0$ rappresenta una retta del piano e come tale lo divide in due semipiani rappresentati dalle disequazioni

$$ax+by+c < 0 \qquad \text{e} \qquad ax+by+c > 0$$

Ma la $ax+by+c = 0$ è anche una funzione lineare a due variabili

$$f(x,y) = ax+by+c$$

e il suo valore dipende dal punto $P(x,y)$ in cui viene calcolata.

Il punto di coordinate *(a,b),* con *a* e *b* coefficienti delle variabili x e y della funzione $f(x,y)$, risulta appartenere al semipiano in cui la $f(x,y)$ 0.

Il segmento con origine in (0,0) ed estremo in (a,b) è perpendicolare alla f(x,y) = ax+by+c ed è orientato secondo il verso di crescita della f(x,y) stessa.

La soluzione di sistemi di disequazioni lineari a 2 o 3 incognite coincide con quella parte di piano comune ai semipiani individuati dalle singole disequazioni.

Questa regione del piano può essere limitata o illimitata.

Nel caso le disequazioni del sistema non hanno soluzioni comuni, cioè i semipiani non si intersecano, il sistema è detto IMPOSSIBILE.

Richiamiamo ora alcune definizioni:

DEFINIZIONE 1

Una figura si dice CONVESSA quando, detti A e B due suoi punti qualunque, il segmento che li ha come estremi è completamente incluso nella figura stessa.

DEFINIZIONE 2

La circonferenza in un cerchio e il perimetro in un poligono si chiamano FRONTIERA della figura stessa.

DEFINIZIONE 3

Si chiama SEMIPIANO DI APPOGGIO di una figura convessa ogni semipiano che contenga tutta la figura e che abbia almeno un punto, della sua retta frontiera, in comune con la frontiera della figura.

Data una figura convessa e limitata ed un fascio di rette parallele ad una retta data, comunque orientata, esistono sempre due rette del fascio che risultano essere frontiera di due semipiani di appoggio della figura e che individuano una striscia di piano (intersezione dei due semipiani) che contiene la figura.

Tale striscia risulta essere la minima tra le strisce ad essa parallele e contenenti la figura.

Sia ax+by+c = 0 la retta generatrice del fascio di rette parallele e sia f(x,y) la funzione ad essa corrispondente.

Si può dimostrare che le due rette del fascio, frontiere dei due semipiani di appoggio della figura, corrispondono ai valori che sono, l'uno il massimo l'altro il minimo, di quelli assunti dalla f(x,y) all'interno della figura convessa.

Per sapere quale dei due sia il minimo e quale il massimo, basta applicare il procedimento del segmento orientato alla f(x,y) = ax+by+c ed individuare il semipiano in cui essa è crescente e quello in cui è decrescente.

Queste considerazioni geometriche permettono di capire che:

- il minimo ed il massimo di f(x,y) vengono assunti solo sulla frontiera della figura convessa

- il minimo e il massimo di f(x,y) possono coincidere con un vertice della figura convessa o con un tratto rettilineo della sua frontiera.

Le ultime considerazioni sono valide per ogni funzione associata a un fascio di rette parallele e per ogni figura convessa e se ne deduce un teorema relativo alle funzioni obiettivo di un problema di P.L.

TEOREMA 1

La funzione obiettivo $z = f(x,y) = ax+by+c$ di un problema di P.L. assume il suo valore massimo/minimo solo su un vertice o su tutti i punti di un lato della frontiera di quella parte di piano convessa che rappresenta il campo di scelta individuato dal sistema di vincoli.

METODO GRAFICO

Torniamo ora ad illustrare le fasi del METODO GRAFICO.

La prima fase, INDIVIDUAZIONE DELLE INCOGNITE, consiste nell'individuare e nominare le variabili descrittive del problema, come già visto nelle fasi 1 e 3 dello studio di RICERCA OPERATIVA, e nella impostazione matematica di un problema di PROGRAMMAZIONE LINEARE.

La seconda fase, COSTRUZIONE DELLA TABELLA A DOPPIA ENTRATA DEI DATI, consiste nello schematizzare in una tabella tutti i dati acquisiti (fase 2 dello studio di R.O.) relativi alle variabili d'azione e descrittivi dei condizionamenti relativi al contesto.

La terza fase, TRADUZIONE ALGEBRICA DEI VINCOLI, consiste nella scrittura delle m disequazioni (relative agli m condizionamenti), combinazioni lineari delle variabili e dei dati ad esse associati, che insieme costituiscono il sistema dei vincoli (si veda impostazione matematica di un problema di P.L.).

La quarta fase, RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DEI VINCOLI, è la prima delle fasi peculiari del metodo grafico.

Per ogni disequazione del sistema dei vincoli bisogna individuare il semipiano che la risolve.

Si procede quindi con *la quinta fase*, INDIVIDUAZIONE DEL CAMPO DI SCELTA O REGIONE AMMISSIBILE, delineando l'intersezione di tutti i semipiani relativi alle disequazioni del sistema dei vincoli.

Essa è una parte di piano convessa, compresa nel primo quadrante, limitata o no, ed è il DOMINIO DEI VALORI AMMISSIBILI del problema, cioè l'insieme di tutte le n-ple di valori possibili per i quali le disuguaglianze del sistema risultano verificate.

La figura così individuata viene chiamata CAMPO DI SCELTA o AREA AMMISSIBILE.

Nella *sesta fase*, RICERCA DEL VERTICE O DELLE PARTI DI FRONTIERA CHE OTTIMIZZINO, viene tracciata la retta relativa alla funzione obiettivo $z=ax+by+c$ e il segmento, ad essa perpendicolare, di estremi (0,0) e (a,b) che consente di individuare il semipiano in cui la funzione obiettivo è crescente e, quindi, quello in cui è decrescente.

Si procede quindi con l'individuazione del punto o dei punti della frontiera del campo di scelta che è/sono la soluzione ottimale della funzione obiettivo secondo il *TEOREMA 1*.

Se il problema richiede un massimizzazione si prenderanno gli estremi della frontiera contenuta nel semipiano positivo per la $f(x,y)$, viceversa, se quella chiesta dal problema è una minimizzazione, la soluzione sarà nella frontiera contenuta nel semipiano negativo per la $f(x,y)$.

L'ultima fase, CALCOLO DEL VALORE OTTIMALE, è una fase aritmetica, consiste infatti nel sostituire le coordinate del vertice, individuato nella fase precedente, nella $f(x,y)$ per ottenere il profitto massimo o il costo minimo richiesto dal problema.

Nel caso la soluzione individuata nella fase precedente sia un lato del campo di scelta le possibili scelte, cioè le soluzioni ottimali, sono infinite, almeno teoricamente, tutte equivalenti tra loro.

OSSERVAZIONE 1

Nel caso $a=b=0$ segue che $z=0$, quindi la funzione obiettivo assume sempre lo stesso valore c (costante) e tale valore risulta essere, ovviamente, anche massimo e minimo della funzione stessa.

OSSERVAZIONE 2

Può accadere che le variabili del problema siano tali che nella realtà possono assumere solo valori interi (es. persone), mentre i punti ottimali, individuati con il metodo grafico, abbiano coordinate non intere.

In questo caso si procede cercando il punto di coordinate intere, sempre all'interno del campo di scelta, che risulti più vicino al punto ottimale teorico individuato dal metodo.

Il campo di scelta reale risulta quindi essere un sottoinsieme del campo di scelta teorico, sottoinsieme costituito dai punti con coordinate intere.

ESEMPIO

Sia dato il seguente problema di massimizzazione

Max (Z1,Z2) =100z1 + 120z2

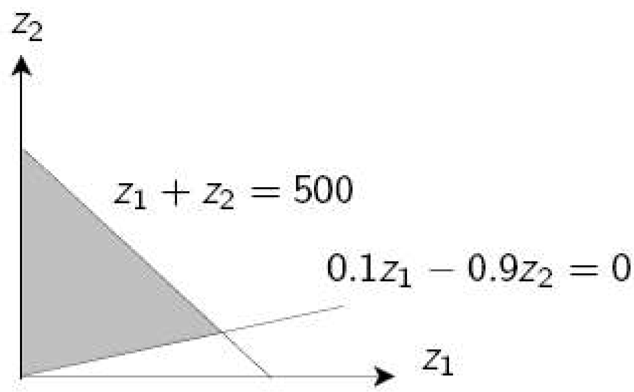
sottoposto a

z1 + z2 <= 500

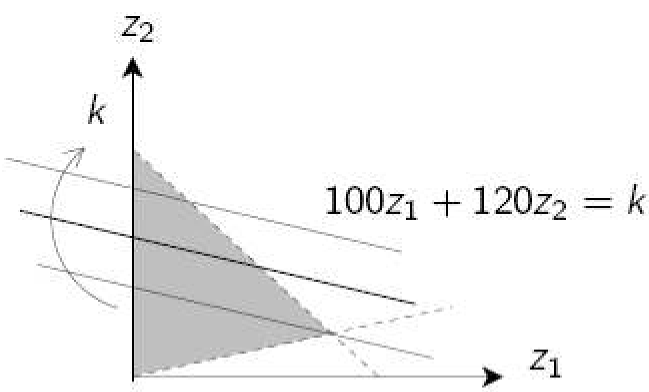
0.1z1 − 0.9z2 <=0

z1, z2 > 0

Tracciamo la regione ammissibile



Tracciamo tutte le linee di livello relative alla funzione obiettivo

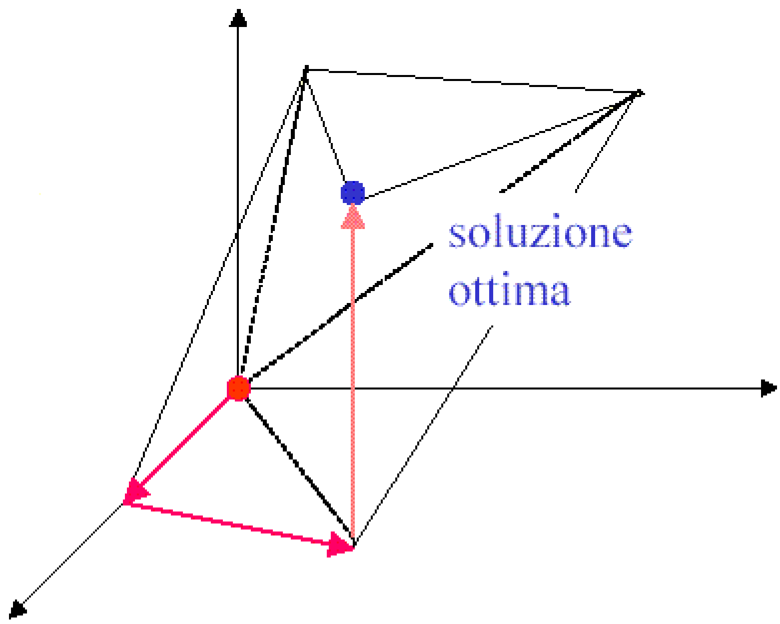


Determiniamo il valore di massimo come intersezione tra la regione ammissibile e la retta con valore di k più alto.

IL METODO DEL SIMPLESSO

Oltre al metodo grafico, per problemi più complessi si utilizza il metodo del ***Simplesso*** (G.B. Dantzig). Esso si basa su tre passi fondamentali:

1. Trova una soluzione ammissibile iniziale corrispondente ad un vertice.
2. Tra i vertici adiacenti a quello corrente scegli un vertice a cui corrisponda un incremento (decremento) della funzione obiettivo.
3. Itera il punto (2) fino a che non sia più possibile migliorare il valore della funzione obiettivo.



Dato un problema di PL è ovviamente necessario, se il modello fatto deve essere di qualche utilità, essere capaci di "risolverlo". Nel caso della PL si dice che un algoritmo risolve un problema se esso è capace di determinare correttamente se il problema dato è vuoto oppure illimitato oppure, se nessuno di queste due casi risulta verificato, sia capace di individuare una soluzione ottima.

Il *Metodo del Simplesso* è stato il primo algoritmo pratico per la risoluzione di problemi di PL ed è tuttora il più usato e uno dei più efficienti in pratica. Per capire il modo di operare del *Metodo del Simplesso* iniziamo con l'osservare che si può dimostrare il fatto, per altro abbastanza intuitivo, che un poliedro ha sempre un numero finito di vertici. Eventualmente i vertici, come abbiamo già avuto modo di osservare, possono essere zero. Comunque, benché finito, il numero di vertici di un poliedro può essere arbitrariamente alto.

Il *Metodo del Simplesso* sfrutta la possibilità di poter ricondurre un qualsiasi problema di Programmazione Lineare nella forma:

$$\min z(\underline{x}) = \underline{c}^T \underline{x}$$
$$A\underline{x} = \underline{b}$$
$$\underline{x} \geq \mathbf{0}$$

che viene chiamata ***forma standard***.
E' sempre possibile trasformare un problema di Programmazione Lineare dalla forma generale alla forma standard, eventualmente introducendo nuove variabili.
La struttura particolare dell'insieme ammissibile di un problema di Programmazione Lineare in forma standard può essere sfruttata per identificare in maniera più semplice i vertici.

Tale possibilità viene sfruttata dal metodo del simplesso per determinare efficientemente, ad ogni iterazione, un nuovo vertice.

Inoltre tale metodo seleziona in maniera accurata i vertici che visita.

Infatti, nelle varie iterazioni vengono scelti solamente i vertici in cui si ottiene una significativa decrescita della funzione obiettivo mentre vengono trascurati gli altri, generando così una successione di valori della funzione obiettivo strettamente decrescente e questo implica che una volta esaminato un vertice, il metodo non può tornarvi.

Perciò in un numero finito di passi viene raggiunto un vertice che è ***ottimo*** oppure viene selezionato uno "spigolo" del poliedro descritto dall'insieme ammissibile lungo il quale la funzione obiettivo è illimitata inferiormente.

Vediamo un'applicazione del metodo ad un esempio pratico

Sia dato il seguente problema

$$\begin{aligned} &\max 3x_1 + x_2 + 3x_3 \\ &s.t. \\ &\quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 2 \\ &\quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 5 \\ &\quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 6 \\ &\quad x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Trasformiamo il problema nella sua forma standard aggiungendo le variabili ausiliarie x4,x5,x6

$$
\begin{aligned}
& \min -3x_1 - x_2 - 3x_3 \\
& s.t. \\
& \quad 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\
& \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 5 \\
& \quad 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_6 = 6 \\
& \quad x_i \geq 0 \quad , \quad i = 1, \ldots, 6
\end{aligned}
$$

A questo punto costruiamo la tavola del simplesso come nel seguente esempio

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	b
	2	1	1	1	0	0	2
	1	2	3	0	1	0	5
	2	2	1	0	0	1	6
r	-3	-1	-3	0	0	0	0
				BASE			

Notiamo che nella riga **r** abbiamo inserito i coefficienti della funzione obiettivo.

N.B: con l'aggiunta delle variabili di slack otteniamo subito una soluzione di base (non necessariamente ammissibile); inoltre le **zj** sono uguali a zero perchè le variabili di base sono tutte fittizie (sono infatti quelle di slack) e quindi hanno costo ci nullo.

Di conseguenza **rj = cj**

La base iniziale è costituita da *a4,a5,a6. Che non è ottimale.*

Quindi il nostro obiettivo è quello di migliorare tale soluzione. Pertanto dalla riga r si sceglie la colonna che ha valore più elevato. Esso è a2. Poi in questa colonna si sceglie che deve uscire a4 in quanto è quella che valore minimo nel rapporto **bj/a2j**.

Si ottiene quindi la seguente tabella

Pivot su 1

2	1	1	1	0	0	2
-3	0	1	-2	1	0	1
-2	0	-1	-2	0	1	2
-1	0	-2	1	0	0	2

f.o. (passata da 0 a -2)

La soluzione non è ancora ottima, entra x_1 ed esce x_2

Pivot su 1

5	1	0	3	-1	0	1
-3	0	1	-2	1	0	1
-5	0	0	-4	1	1	3
-7	0	0	-3	2	0	4

f.o. = -4

Pivot su 5

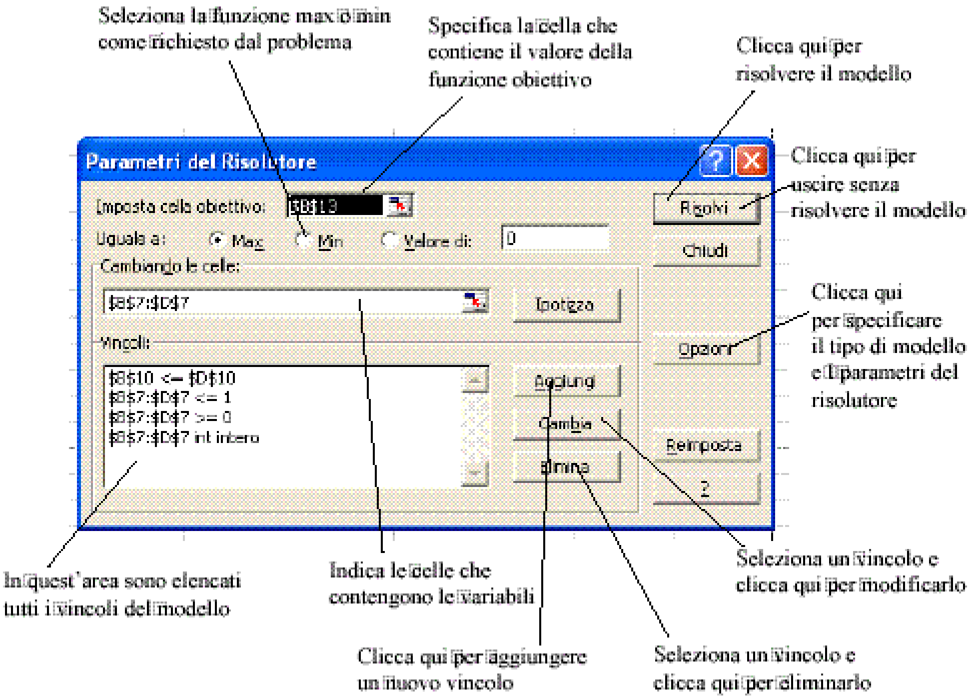
1	1/5	0	3/5	-1/5	0	1/5
0	3/5	1	-1/5	2/5	0	8/5
0	1	0	-1	0	1	4
0	7/5	0	6/5	3/5	0	27/5

$r_j \geq 0, \forall j$ STOP, soluzione ottima

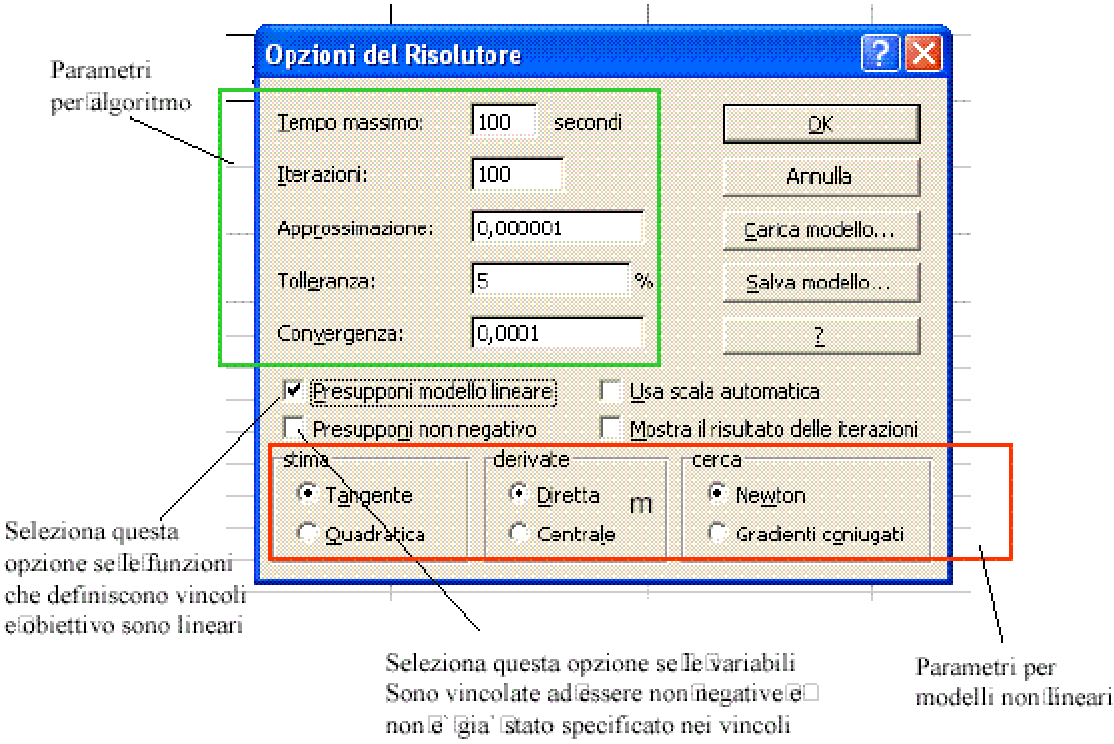
La soluzione ottima trovata vale:
$x_1 = 1/5$; $x_2 = 0$; $x_3 = 8/5$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$; $x_6 = 4$
La funzione obiettivo vale: $z = -27/5$

Risolvere i problemi di programmazione lineare con MSExcel

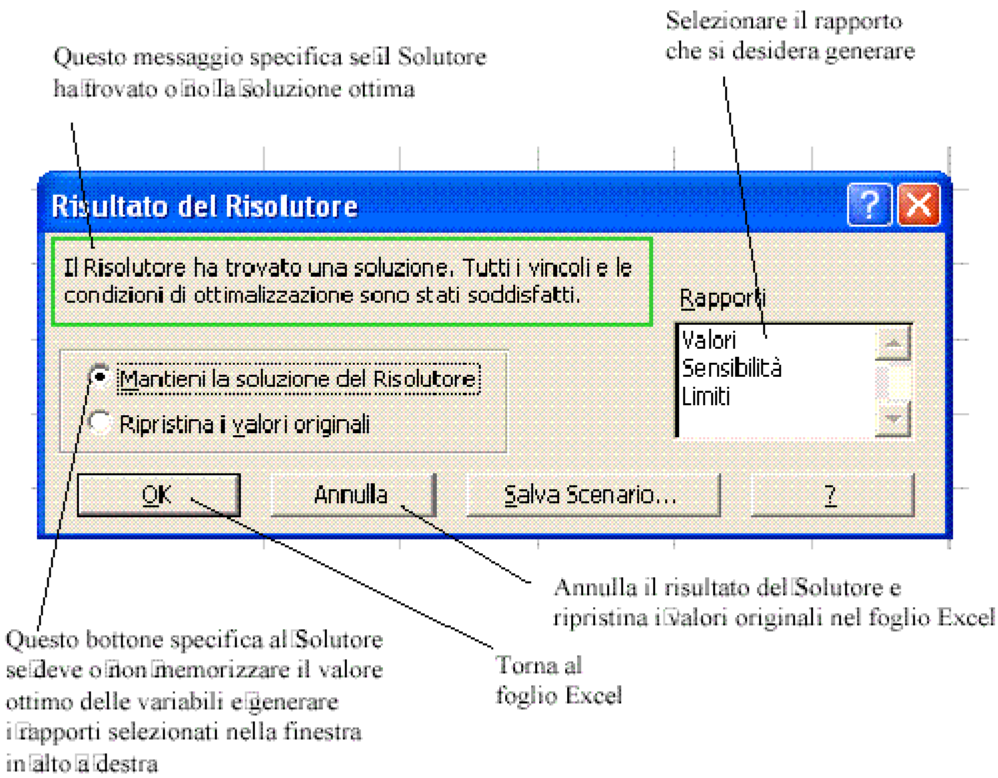
Microsoft Excel dispone di una funzione tra i Componenti aggiuntivi (Add-In) che è chiamata Risolutore" (Solver) che consente di determinare la soluzione ottima di problemi di Programmazione matematica (PL, PLI, e alcuni classi particolari di PNL). La procedura di ottimizzazione utilizzata per la PL è il metodo del simplesso.
Nelle celle del foglio Excel si inseriscono i dati del problema, i vincoli e la funzione obiettivo.
La tipica schermata che appare quando si lancia il risolutore è mostrata nella figura sottostante in cui sono descritti i parametri da impostare per la soluzione del problema in questione.



Mentre la schermata relativa alle opzioni offerte dal risolutore è mostrata nella figura sottostante in cui sono descritti i parametri da impostare per la soluzione del problema in questione.



La schermata conclusiva è mostrata in figura sottostante che serve per fornire l'esito della computazione.



Inoltre, selezionando i tre possibili rapporti vengono riassunti in tre fogli distinti le proprietà della particolare funzione ottima.